

Aufgabenmix(3) – Lösungen (1/2)

Aufgabe 1 :

$$K_0 = 2000 \text{ €} ; t = 5 : K(5) = 2433,31$$

$$a) K(t) = K_0 \cdot b^t \text{ mit } K(5) = K_0 \cdot b^5 = K(5)$$

$$\Rightarrow b = \sqrt[5]{\frac{2433,31}{2000}} \approx 1,040000359 = 1,04$$

$$\underline{K(t) = 2000 \cdot 1,04^t}$$

$$b) \text{ Verdoppelung : } K(T_V) = 2K_0$$

$$K_0 \cdot 1,04^{T_V} = 2K_0 \Leftrightarrow 1,04^{T_V} = 2$$

$$\Leftrightarrow T_V = \log_{1,04}(2) \approx 17,67 \text{ [a]}$$

Also: Verdoppelung nach 18 Jahren

$$c) K(t_5) = 5000$$

$$2000 \cdot 1,04^{t_5} = 5000 \Leftrightarrow t_5 = \log_{1,04}(2,5) \approx 23,36$$

Also: Nach 24 Jahren beträgt sein Kap. min. 5000.-

$$d) \text{ Erhöhung um } 600 \text{ €} \Rightarrow K(t) = 2600$$

$$\dots t = \log_{1,04}(1,3) \approx 6,69, \text{ also: } \underline{\text{Nach 7 Jahren}}$$

$$e) \text{ Prozentualer Gewinn nach 10 Jahren:}$$

$$1,04^{10} \approx 1,48, \text{ also } \underline{48\% \text{ Gewinn}}$$

Aufgabe 2

$$\text{Nach 7 Jahren: } K(7) = K_0 \cdot b^7 = 3289,83 \quad (\text{I})$$

$$\text{Nach 13 Jahren: } K(13) = K_0 \cdot b^{13} = 4762,68 \quad (\text{II})$$

$$\frac{(\text{II})}{(\text{I})}: \frac{K_0 \cdot b^{13}}{K_0 \cdot b^7} = \frac{4762,68}{3289,83} \Leftrightarrow b^6 = \frac{4762,68}{3289,83}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt[6]{\frac{4762,68}{3289,83}} \approx 1,0399998 \Rightarrow b \approx 1,04 \quad \text{Also } \underline{4\% \text{ Zins}}$$

$$\text{I: } K_0 \cdot 1,04^7 = 3289,83 \Leftrightarrow K_0 = 3289,83 \cdot 1,04^{-7}$$

$$\Leftrightarrow \underline{K_0 \approx 2500} \quad \text{und } \underline{K(t) = 2500 \cdot 1,04^t}$$

Aufgabe 3

$$a) \text{ Exponentielles Wachstum: } A(t) = A_0 \cdot b^t ; t=0 : \text{Entdeck.}$$

$$\text{(I)} A(3) = A_0 \cdot b^3 = 1,21 \quad \text{I: } \frac{b^3}{b^5} = \frac{1,21}{1,74} = b^{-2}$$

$$\text{(II)} A(5) = A_0 \cdot b^5 = 1,74 \quad \text{II: } \frac{1,21}{1,74} = b^{-2}$$

$$\Leftrightarrow b = \sqrt[2]{\frac{1,21}{1,74}} \approx 1,19917 \Rightarrow b \approx 1,20$$

$$\text{(I): } A_0 \cdot 1,20^3 = 1,21 \Leftrightarrow A_0 = \frac{1,21}{1,20^3} \approx 0,70023 \Rightarrow A_0 = 0,70$$

$$\underline{A(t) = 0,70 \cdot 1,20^t} ; \text{ Anfangsbestand } A_0 = 0,70 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$b) \text{ Lineares Wachstum: } A(t) = m \cdot t + A_0$$

$$m = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1,74 - 1,21}{5 - 3} = \frac{0,53}{2} = 0,265 \text{ [} \frac{\text{m}^2}{\text{a}} \text{]} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} A(t) = \underline{0,265t + 0,415}$$

$$A_0 = A(3) - m \cdot 3 = 1,21 - 0,265 \cdot 3 = 0,415$$

Aufgabe 4

a) $t=0: u(0) = 85 - 20 = 65$

$t=2: u(2) = 73,2 - 20 = 53,2$

$u(t) = 65 \cdot b^t$; $u(2) = 65 \cdot b^2 = 53,2 \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{53,2}{65}} \approx 0,905$

$u(t) = \underline{65 \cdot 0,905^t}$

b) $u(10) = 65 \cdot 0,905^{10} \approx 24,0$ [°C] ; Unterschied!

Die Temperatur beträgt $24^\circ\text{C} + 20^\circ\text{C} = \underline{44^\circ\text{C}}$

c) $C(t) = \underline{65 \cdot 0,905^t + 20}$

$C(t) = 20 \Rightarrow 65 \cdot 0,905^t + 20 = 60 \Leftrightarrow 65 \cdot 0,905^t = 40$

$\Leftrightarrow 0,905^t = \frac{40}{65} \Leftrightarrow t = \log_{0,905} \left(\frac{40}{65} \right) \approx 4,8638$ [Min]

$t = 4,8638$ [Min] = 4 Min + $0,8638 \cdot 60\text{s} \approx \underline{4\text{ Min } 52\text{ s}}$

d) $\underline{K(t) = 65 \cdot 0,905^t + 293}$

Aufgabe 5

$A(t) = A_0 \cdot b^t$; $A_0 = 3$

$A(10) = 4,92 \Leftrightarrow 3 \cdot b^{10} = 4,92 \Leftrightarrow b^{10} = \frac{4,92}{3} \Leftrightarrow b = \sqrt[10]{\frac{4,92}{3}}$

$A(t) \approx \underline{3 \cdot 1,0507^t}$

Verdoppelung: $A(t) = 2 \cdot A_0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1,0507^t = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 1,0507^t = 2$

$t = \log_{1,0507} (2) \approx 14,015259$ [h] = 14 h 55 sek

$A(t) = 3 \cdot 2^{t/14} \approx \underline{3 \cdot 2^{0,0714t}}$

Aufgabe 6

1. $z(10) = 32 \Leftrightarrow 20 \cdot b^{10} = 32 \Leftrightarrow b = \sqrt[10]{\frac{32}{20}} \approx 1,048$; 4,8% Jahre.

Verd.: $z(t) = 2 \cdot z_0 \Leftrightarrow \tilde{z}_0 \cdot 1,048^t = 2 \tilde{z}_0 \Leftrightarrow t = \log_{1,048} (2) \approx 14,78$ [a]

2. $z(t) = 20 \cdot 2^{t/14,78} \approx \underline{20 \cdot 2^{0,0677t}}$; 20: Streckung in y-Richt. ; 0,0677: Streckung in x-Richt.

3. $20 \cdot 1,048^t = 30 \cdot 0,98^t \Leftrightarrow \frac{1,048^t}{0,98^t} = \frac{30}{20} \Leftrightarrow \left(\frac{1,048}{0,98} \right)^t = \frac{3}{2} \quad | \lg$

$t = \frac{\lg \left(\frac{1,048}{0,98} \right)}{\lg \left(\frac{3}{2} \right)} \approx \underline{6,044}$ [a]